

Mathematik zum Häkeln: Hyperbolische Strukturen

Oliver Labs und Martin Skrodzki



Abbildung 1: Zwei endliche Ausschnitte der hyperbolischen Ebene als gehäkelte Einbettungen im dreidimensionalen Raum; das rechte Modell zeigt drei Parallelen zu einer Geraden durch einen gemeinsamen Punkt. Modelle und Bilder s. [3, ch. 5] und [4, ch. 2]. Mit freundlicher Genehmigung von Daina Taimina.

Seit der Antike erscheint die Eigenschaft fast selbstverständlich, dass durch einen Punkt außerhalb einer Geraden genau eine Parallele verläuft. Und doch versuchten Generationen von Mathematikerinnen und Mathematikern vergeblich, sie aus den anderen Axiomen herzuleiten. Im 19. Jahrhundert untersuchten Lobatschewski und Bolyai unabhängig voneinander, was geschieht, wenn man diese Eindeutigkeit aufgibt. So entstand das Konzept der hyperbolischen Geometrie, in der, ohne eine gegebene „Gerade“ zu schneiden, durch denselben Punkt unendlich viele „Parallelen“ verlaufen können. Beltrami verlieh dieser Idee Anschaulichkeit (1868), indem er sie auf Flächen konstanter negativer Gaußscher Krümmung im Raum modellierte, wobei man sieht, wie die „Geraden“ (Geodäten) auseinanderstreben und so Raum für viele „Parallelen“ entsteht. Das Parallelenaxiom zeigte sich seit diesen Entwicklungen nicht länger als zwingende Folgerung, sondern als Ausgangspunkt verschiedener, gleichberechtigter geometrischer Welten.

Die Handarbeitstechnik des Häkelns bietet eine erstaunlich einfache Möglichkeit, hyperbolische Flächen herzustellen. Dabei wird ein durchgehender Faden durch Schlaufen gezogen, um ein textiles Gebilde aus einer Reihe von Maschen zu bilden. Bleibt die Anzahl von Maschen von Reihe zu Reihe gleich, entsteht eine ebene Fläche. Durch weniger Maschen in den folgenden Reihen entsteht positive, durch das Hinzufügen von Maschen in folgenden Reihen negative Krümmung.

Holmgren erweiterte einen Satz von Hilbert und zeigte, dass eine glatte Einbettung eines Ausschnitts der hyperbolischen Ebene in den dreidimensionalen Raum nicht beliebig, sondern nur bis zu einer endlichen Distanz d isometrisch und glatt erweitert werden kann, s. [2, Ch. 5-11]. Das linke Foto aus Abbildung 1 zeigt eine solche Einbettung, bei der jede der vier Farben aus genau 100 Metern Garn gehäkelt wurde. Die entstehenden farbigen Streifen werden auf der negativ gekrümmten Fläche nach außen hin dünner, da die Anzahl der Maschen pro Reihe zunimmt.

Das alternative Parallelenaxiom wird durch das andere gehäkelte Modell begreifbar, siehe Abbildung 1 rechts: Auf der gekräuselten Fläche lassen sich drei „Geraden“ durch denselben Punkt verfolgen, die eine gegebene „Gerade“ nicht treffen; drei verschiedene „Parallelen“ treten so anschaulich hervor. Hält man dieses Modell in der Hand, ist es einfach, das Textil so zu spannen, dass jeweils eine der Linien gerade wird. So lässt sich die hyperbolische Geometrie im Wortsinne „begreifen“, vergleiche die Arbeiten in [1, S. 16/17, 24/25].

Literatur

- [1] Diana Davis, editor. *Illustrating Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, 1 edition, 2020.
- [2] Manfredo Perdigao do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1 edition, 1976.
- [3] David W. Henderson and Daina Taimina. *Experiencing Geometry: Euclidean and Non-Euclidean with History*. Pearson, New York, 3 edition, 2020.
- [4] Daina Taimina. *Crocheting adventures with hyperbolic planes: Tactile mathematics, art and craft for all to explore*. CRC Press, Boca Raton, 2 edition, 2018.